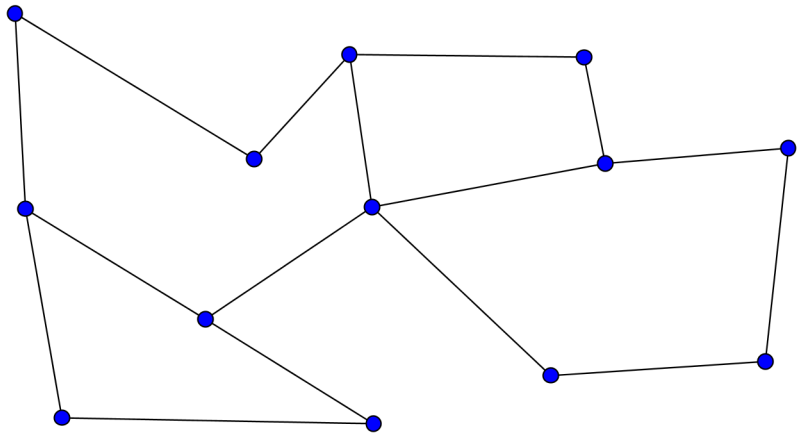
Aumentando la *k*-conexidad en gráficas geométricas

XXXI Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones.

Dr. Jorge Urrutia
Dr. David Flores
M.C. Juan Carlos Catana

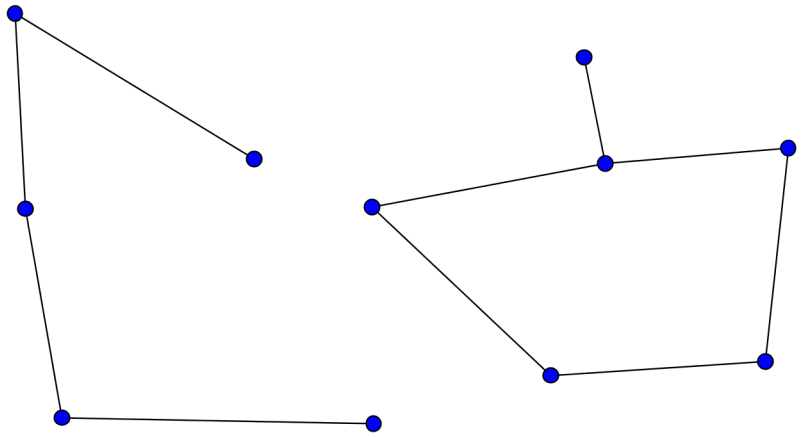
Gráfica geométrica

- **<u>Def:</u>** Una gráfica geométrica $G=(V,E)$, es una en la que los vértices son puntos en el plano y sus aristas son segmentos de recta que conectan a dos de ellos.



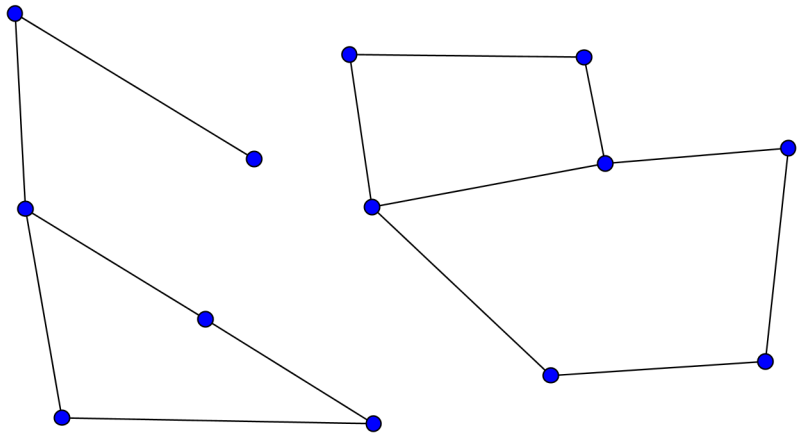
k-conexidad por vértices

- **<u>Def:</u>** Una gráfica $G=(V,E)$ es k-conexa por vértices, si al eliminar a lo más $k-1$ vértices de ella, se mantiene conexa.



k-conexidad por aristas

- **<u>Def:</u>** Una gráfica *G=(V,E)* es *k*-conexa por aristas, si al eliminar a lo más *k-1* aristas de ella se mantiene conexa.



Algoritmos locales

- Es un algoritmo distribuido:
  - Realiza computo sólo con información local, es decir, con la información de su vecindario a distancia *i*.
  - El tamaño de sus mensajes es constante (o logarítmico).
  - Su tiempo de ejecución toma un número constante de rondas de comunicación (independiente del tamaño de la red).

El problema de aumentación

- El problema de *aumentación* se refiere a, dada una gráfica $G=(V,E)$, encontrar un conjunto mínimo de aristas E', tal que al añadirlas a G se logre conseguir la propiedad P.

El problema de aumentación

- Para gráficas generales: Se tienen algoritmos que resuelven el problema de aumentación de conexidad en tiempo polinomial.
- Para gráficas planas (no k_5, $k_{3,3}$): Se ha mostrado que la conexidad tanto por vértices como por aristas es *NP-completo*. *[Kant y Bodlaender]* Existen algoritmos de aproximación de factor constante.
- Para gráficas geométricas planas: El problema de aumentación de conexidad es *NP-completo* ☹ en ambos casos de *k*-conexidad, para $k \geq 2$ *[Rutter y Wolf]*.

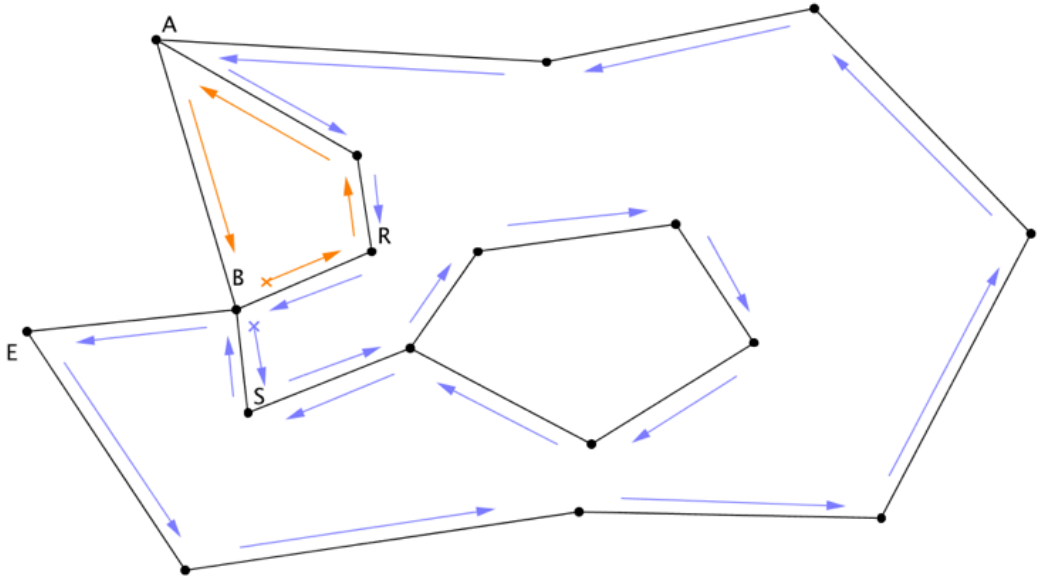
El problema de aumentación

- El objetivo se centra en: dada una gráfica geométrica plana G, encontrar un número mínimo <u>suficiente</u> de aristas para extender a G a una gráfica 2-conexa.

  - Detección local de aristas y vértices de corte.
  - Aumentación de 2-conexidad por aristas.
  - Aumentación de 2-conexidad por vértices.

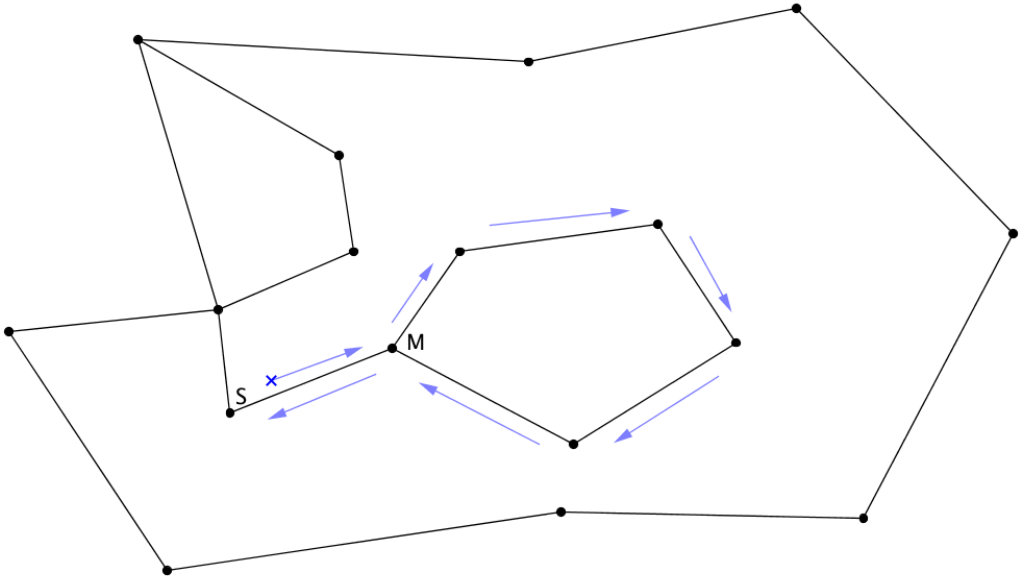
Detección de vértices de corte

- **<u>Obs:</u>** Un **vértice** es de corte, si en el recorrido de alguna de sus caras incidentes aparece más de dos veces.



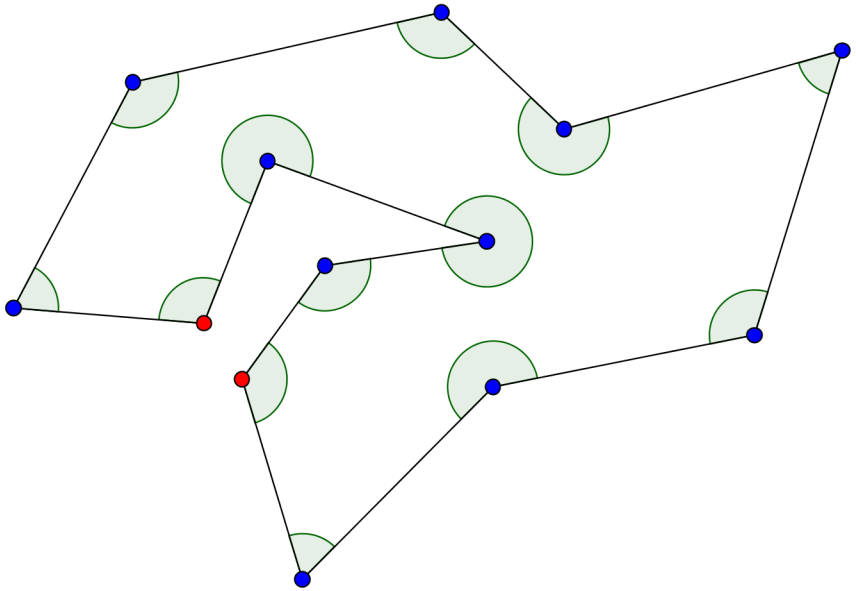
Detección de vértices de corte

- **<u>Obs:</u>** Una **arista** es de corte, si en el recorrido de alguna de sus caras incidentes aparece más de una vez.



Detección de vértices de corte

- **<u>Lema:</u>** Una cara F tiene al menos un vértice de corte, ←→ , la suma de los ángulos internos de F es al menos $\pi(n-1)$.



k-conexidad por aristas

- La aumentación de k=2 conexidad por aristas ha sido mayormente atacada y se han tratado desde dos perspectivas:

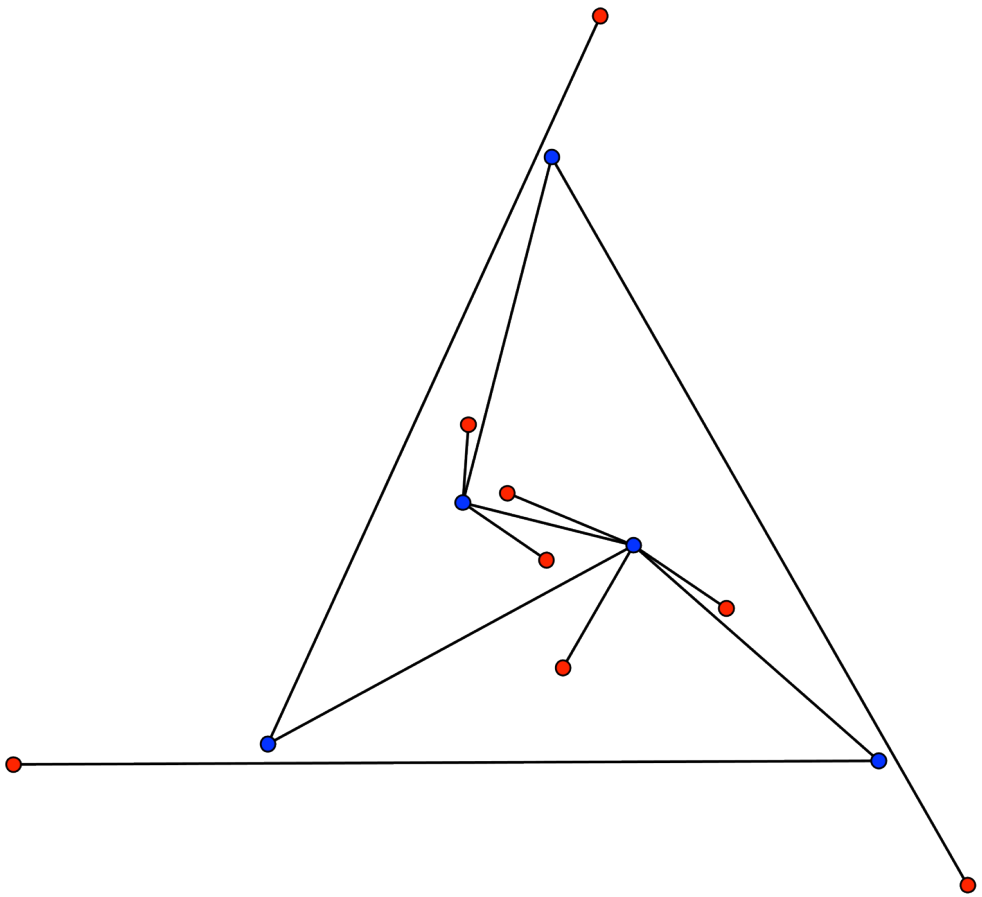
- Aumentación de árboles.
- Aumentación de gráficas generales.

2-conexidad por aristas

- Dado un **árbol geométrico** (plano) se busca aumentarlo de tal forma que el resultado sea una gráfica geométrica **plana 2-conexa por aristas**.

- **Cota inferior:** $6n/11$ aristas necesarias *[García y Tejel]*.
- **Cota superior:** $2n/3$ aristas suficientes *[Urrutia, Hurtado, et al]*.

*Cota inferior: $6n/11$



2-conexidad por aristas

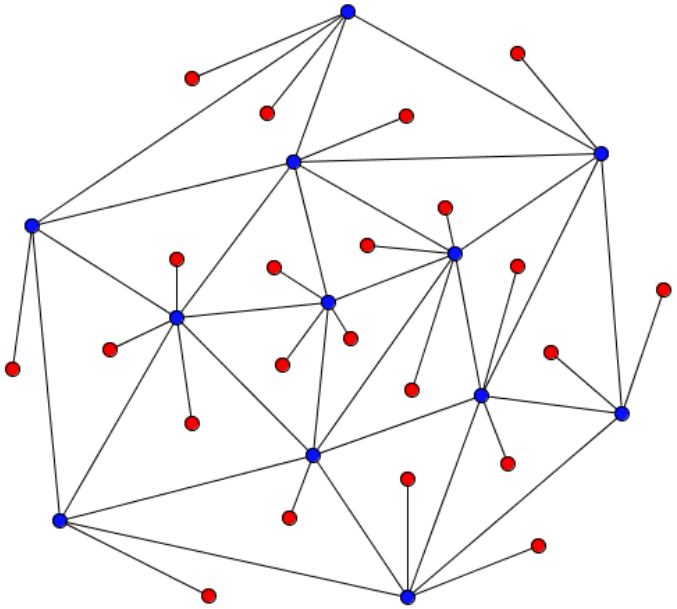
- Dado una **gráfica geométrica** (plana) se busca aumentarla de tal forma que el resultado sea una gráfica geométrica **plana 2-conexa por aristas**.

- **Cota inferior:** $2n/3$ aristas necesarias *[Urrutia, Hurtado, et al]*.
- **Cota superior:** $2n/3$ aristas suficientes *[Tóth C.]*.

*Cota inferior $2n/3$

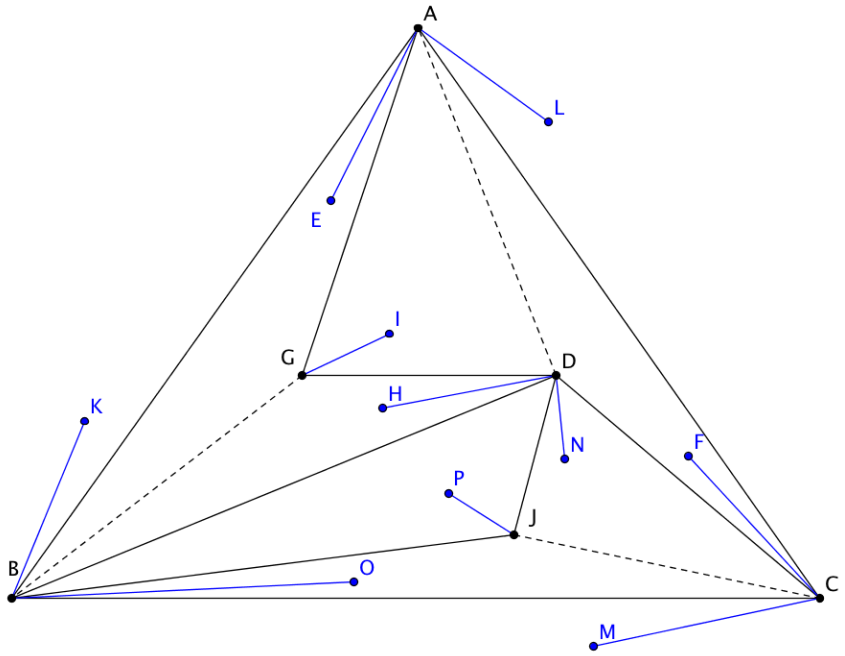
- Esencialmente es la triangulación de una nube de puntos, tal que al interior de cada triangulo tenemos una hoja, y al exterior del cierre convexo una hoja por cada vértice.

- ¿Existe otra familia de gráficas que realiza esta misma cota, pero que use menos aristas?



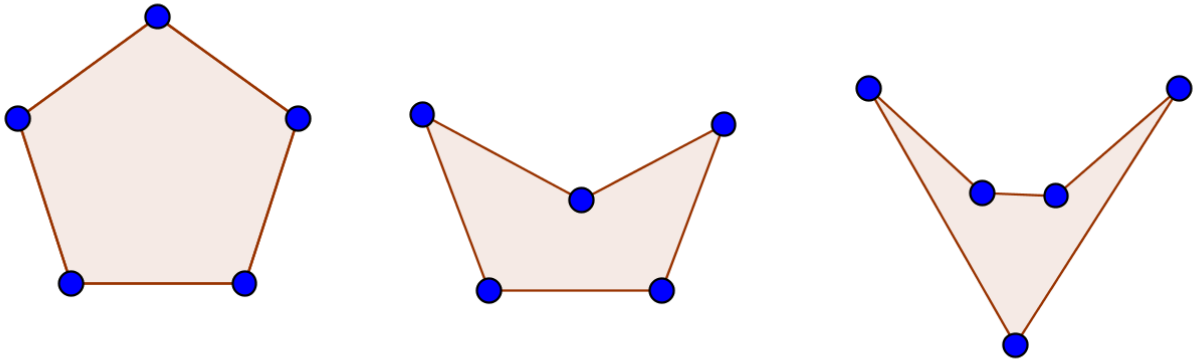
*Cota inferior $2n/3$

- **<u>Teo:</u>** Toda nube de n puntos con h de ellos en su cierre convexo, puede cuadrilateralizarse con n-h cuadriláteros no convexos con interiores disjuntos.



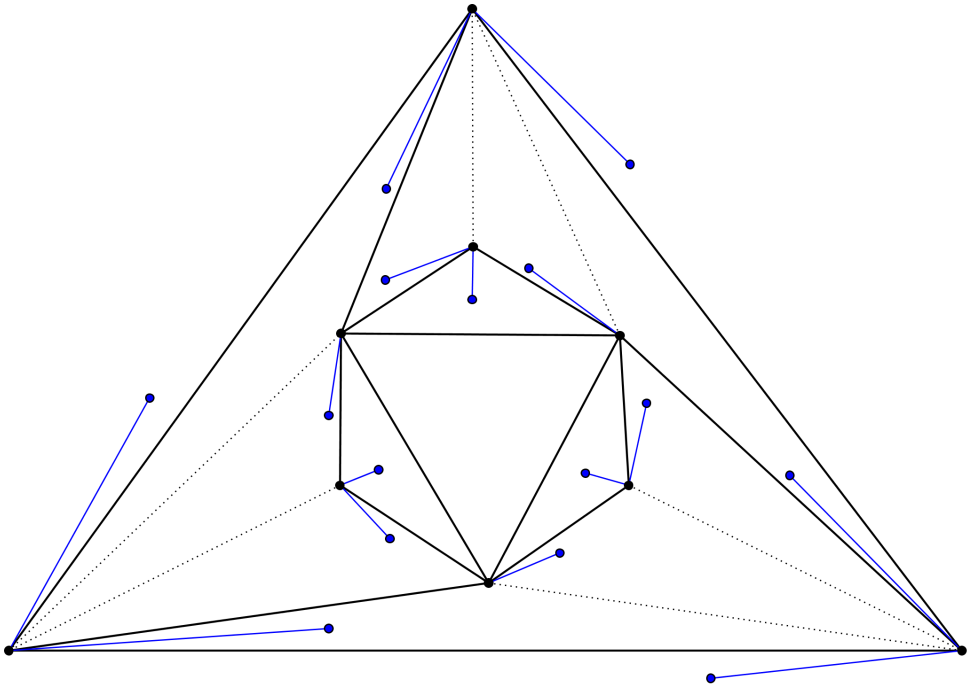
*Cota inferior $2n/3$

- ¿Puede construirse otra familia con pentágonos no convexos?



*Cota inferior *2n/3*

- Familia de gráficas que alcanza la cota de 2n/3 aristas adicionales para ser *2*-conexa por aristas.



2-conexidad por vértices

- Dado una **gráfica geométrica** (plana) se busca aumentarla de tal forma que el resultado sea una gráfica geométrica plana 2-conexa.

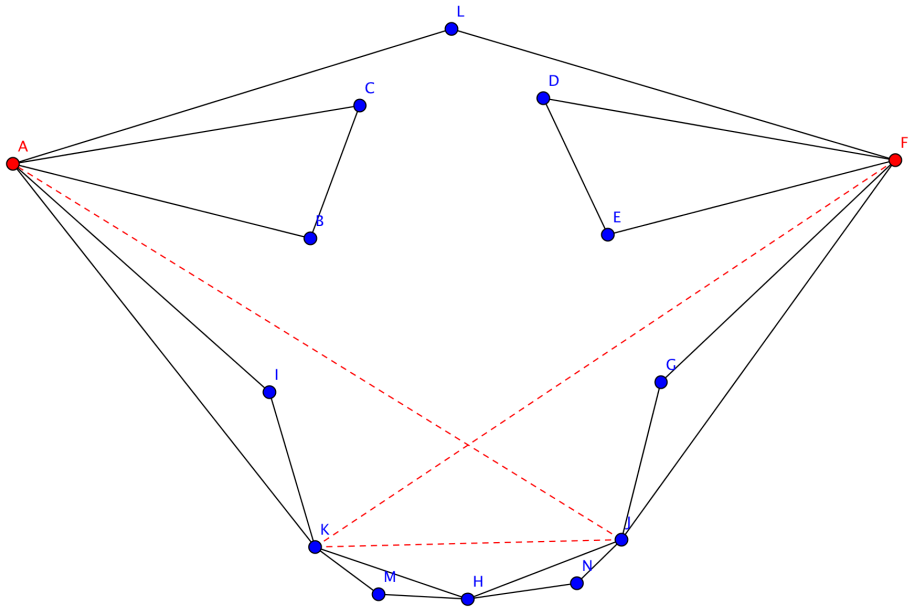
- **cota inferior:** *n-2* aristas necesarias *[Urrutia, Hurtado, et al]*.
- **cota superior:** *n-2* aristas necesarias *[Urrutia, Hurtado, et al]*.

Aumentación euleriana

- El problema de *aumentación* se refiere a, dada una gráfica $G=(V,E)$, encontrar un conjunto de aristas E', tal que al añadirlas a G se logre conseguir la propiedad P.

Aumentación Euleriana

- No siempre se puede conservando planaridad ☹



En resumen

- Se tienen algoritmos locales para la detección de aristas y vértices de corte.
- ¿Podemos bajar la cota superior de aumentación de 2-conexidad por aristas para arboles?.
- El problema de descomposición no convexa de polígonos convexos.
- ¿El problema de aumentación euleriana esta en *NP-completo* o en *P*?.

2-conexidad por vértices

¡Gracias!